

NÜMERİK ANALİZ

CEVAPLAR

-5-

Dr. Öğr. Üyesi Melike KARATAY

CEVAP 1:

Bir fonksiyon $f(x)$ 'in Maclaurin serisi şu şekilde tanımlanır:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\begin{aligned}\sin(0.2) &\approx 0.2 - 0.0013333 + 0.0000026667 - 0.00000000254 \\ &\approx 0.1986693641\end{aligned}$$

$$\sin(0.2) \approx 0.198669330 \quad (\text{hesap makinesiyle gerçek değer})$$

Mutlak Hata (Absolute Error):

$$|0.1986693641 - 0.198669330| = 0.0000000341$$

Bağıl Hata (Relative Error):

$$\frac{0.0000000341}{0.198669330} \approx 1.72 \times 10^{-7}$$

CEVAP 2:

Fonksiyon:

$$f(x) = x^3 - 4x + 1$$

Uç nokta değerlerini hesaplayalım:

- $f(0) = 0^3 - 4(0) + 1 = 1$
- $f(1) = 1^3 - 4(1) + 1 = 1 - 4 + 1 = -2$

$$f(0) = 1, \quad f(1) = -2 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$$

Formül:

$$c = \frac{a+b}{2}$$

- $a = 0, f(a) = 1$
- $b = 1, f(b) = -2$
- $c = \frac{0+1}{2} = 0.5$

$$f(0.5) = (0.5)^3 - 4(0.5) + 1 = 0.125 - 2 + 1 = -0.875$$

Yeni aralık:

- $f(c) = -0.875 < 0$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0$

→ İşaret değişimi $[0, 0.5]$ aralığında

$$x \in [0, 0.5]$$

- $a = 0, f(a) = 1$
- $b = 0.5, f(b) = -0.875$

$$c = \frac{0 + 0.5}{2} = 0.25$$

$$f(0.25) = (0.25)^3 - 4(0.25) + 1 = 0.015625 - 1 + 1 = 0.015625$$

- $f(0.25) = +0.015625 > 0$
- $f(0.5) = -0.875 < 0$

→ İşaret değişimi artık $[0.25, 0.5]$ aralığında

2 iterasyon sonunda kök yaklaşık olarak:

$$x \in [0.25, 0.5] \quad (\text{yaklaşık ortası: } 0.375)$$

Yani 2 iterasyon sonunda köke yakın sonuç:

$$x \approx 0.375$$

CEVAP 3:

Algoritma:

1. Başlangıç olarak a ve b uç noktaları seçilir ve $f(a).f(b)<0$ olduğu doğrulanır.

2. Doğrusal interpolasyon ile yeni tahmin hesaplanır.

$$c = b - ((f(b).(b - a) / (f(b) - f(a)))$$

3. Eğer $f(c)=0$ ise c köktür.

Aksi halde

• $f(a).f(c) < 0$ ise kök $[a,c]$ aralığında aranır.

• $f(b).f(c) < 0$ ise kök $[c,b]$ aralığında aranır.

4. Hata toleransına ulaşıncaya kadar iterasyon devam eder.

CEVAP 4:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Verilen:

$$f(x) = x^3 - x - 2$$

Türevi:

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

Başlangıç: $x_0 = 1.5$

$$f(1.5) = (1.5)^3 - 1.5 - 2 = 3.375 - 1.5 - 2 = -0.125$$

$$f'(1.5) = 3(1.5)^2 - 1 = 3(2.25) - 1 = 6.75 - 1 = 5.75$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.5 - \frac{-0.125}{5.75} \approx 1.5 + 0.0217 = \boxed{1.5217}$$

$$f(1.5217) = (1.5217)^3 - 1.5217 - 2 \approx 3.526 - 1.5217 - 2 = \boxed{0.0043}$$

$$f'(1.5217) = 3(1.5217)^2 - 1 \approx 3(2.3167) - 1 = 6.950 - 1 = \boxed{5.950}$$

$$x_2 = 1.5217 - \frac{0.0043}{5.950} \approx 1.5217 - 0.00072 = \boxed{1.5210}$$